Tentamen Mechanica **1 februari 2010**

Maak iedere opgave op een apart vel.
Schrijf op ieder vel naam en studentnummer.

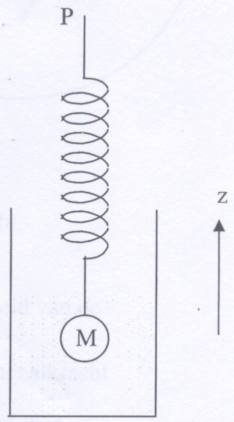
cijfer = (aantal punten + 5)/5

9 pnt

Opgave 1 (12 punten)

Een massa m is opgehangen aan veer met veerconstante k. De massa beweegt in een vloeistof die aanleiding geeft tot een wrijvingskracht $F_w = -c\dot{z}$.

De veer is opgehangen aan een punt P.
We beschouwen eerst de situatie waarbij P in rust is.



a) Geef de bewegingsvergelijking voor de massa m. Schrijf de bewegingsvergelijking met constantes in termen van γ en ω_0 die gegeven zijn als:

$$\gamma = \frac{c}{2m} \text{ en } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\ddot{z} = -g - \frac{c}{m}\dot{z} - \omega_0^2 z$

b) Een van de mogelijke oplossingen van deze bewegingsvergelijking wordt gegeven door $z(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \varphi_0)$.

- Ga na dat dit een oplossing is van de bewegingsvergelijking en bepaal ω_d in termen van γ en ω_0. $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
- In welke situatie is de gegeven oplossing geldig ? $\omega_0 > \gamma$
- Waar hangen A en φ_0 van af ? begin snelheid/uitwijking

$A\sin(\phi) = z_0$

$-\gamma A\sin(\phi_0) + \omega_d A\cos(\phi_0) = \dot{z}_0$

$-\gamma z_0 + \omega_d A\cos(\phi_0) = \dot{z}_0$

c) Naast de bij b) gegeven oplossing zijn er nog twee andere oplossingen mogelijk van de bewegingsvergelijking.
Maak een schets waarin voor elk van de mogelijke oplossingen het verloop wordt aangegeven. Ga er daarbij vanuit dat de massa M een zekere uitwijking $z(t=0) = z_0$ krijgt en dan vanuit rust wordt losgelaten.
Geef bij elk van de mogelijke oplossingen aan voor welke situatie de betreffende oplossing van toepassing is.

$\omega_0 > \gamma$ $\omega_0 = \gamma$ $\omega_0 < \gamma$

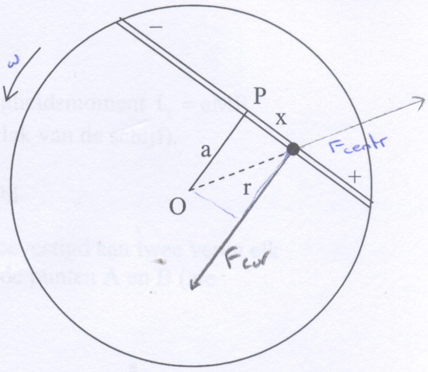
In de volgende onderdelen voert het punt P een gedwongen beweging uit waardoor op M een additionele kracht $F = F_0 \cos \omega t$ in de z-richting wordt uitgeoefend.

$z(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$ is nu een oplossing van de bewegingsvergelijking.

d) Schets het verloop van de amplitudo als functie van de frequentie.
Geef in de schets twee curves. Een voor zwakke demping en een voor sterke demping.
Let bij het tekenen van de curves in het bijzonder op het verloop bij $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$ en $\omega \cong \omega_0$. (Er hoeft hier geen afleiding van $A(\omega)$ gegeven te worden, kennis van het verloop van de curves is voldoende).

6 pnt

Opgave 2 (10 punten)



Een draaitafel roteert met constante hoekfrequentie ω. Op de draaitafel loopt een recht gootje. De afstand van het gootje tot de draaiingsas is a. In het gootje ligt een knikker met massa m, die ten gevolge van de rotatie van de draaitafel langs het gootje beweegt. De knikker, die als een puntmassa mag worden opgevat, beweegt zonder wrijving.
De x-as wordt gekozen langs het gootje. x = 0 wordt gekozen bij het punt P dat zich het dichtst bij de draaiingsas bevindt. De positieve en de negatieve x-richting zijn aangegeven met het +teken, resp. –teken.
In de tekening beziet men de draaitafel van boven.
De draaiingsas gaat door het punt O.
Het pijltje geeft de bewegingsrichting van de rand van de schijf aan. De hoekfrekwentievector staat loodrecht op het papier, naar de lezer toe gericht.
De afstand van de knikker tot de draaiingsas wordt aangeduid met r.

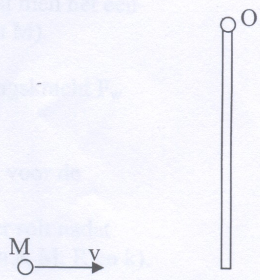
Op t = 0 wordt de positie van de knikker gegeven door $x(0) = x_0$. De snelheid van de knikker wordt dan gegeven door $\dot{x}(0) = v_0$.

a) Neem de tekening over en geef daarin met behulp van pijlen de centrifugaalkracht ($\mathbf{F}_{cf}$) en de Corioliskracht ($\mathbf{F}_{Cor}$) aan.
b) Laat zien dat de x-component van de bewegingsvergelijking gegeven wordt door: $m\ddot{x} - m\omega^2 x = 0$.
c) De algemene oplossing van deze bewegingsvergelijking wordt gegeven door $x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. Bepaal A en B. Beschrijf in woorden hoe de beweging verloopt.
$A = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{\omega})$ $B = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{\omega})$ naar rechts
D ? d) Tijdens zijn beweging oefent de knikker een kracht F uit op de zijkant van het gootje. Geef een uitdrukking voor deze kracht in termen van m, ω, x_0 en v_0 en t.
$F = m\omega(\omega a - (\omega x_0 + v_0)e^{\omega t} - (-\omega x_0 + v_0)e^{-\omega t})$

Opgave 3 (8 punten) 8 pnt

Gegeven is een fysische slinger met lengte L en traagheidsmoment I ten opzichte van een vaste draaiingsas door O (loodrecht op papier): $I = \frac{1}{3}ML^2$

Een deeltje met massa m en met snelheid v botst volkomen niet-elastisch loodrecht tegen het uiteinde van de slinger (zie figuur).



a) Beargumenteer waarom van de volgende behoudswetten (i) en (ii) niet van toepassing zijn bij deze botsing, en waarom (iii) wel van toepassing is.
(i) behoud van impuls;
(ii) behoud van kinetische energie;
(iii) behoud van impulsmoment t.o.v. O.

b) Bereken met behulp van (iii) de hoeksnelheid ω van de slinger direct na de botsing (in termen van M, m, L en v).

$\frac{-3mv}{ML}$

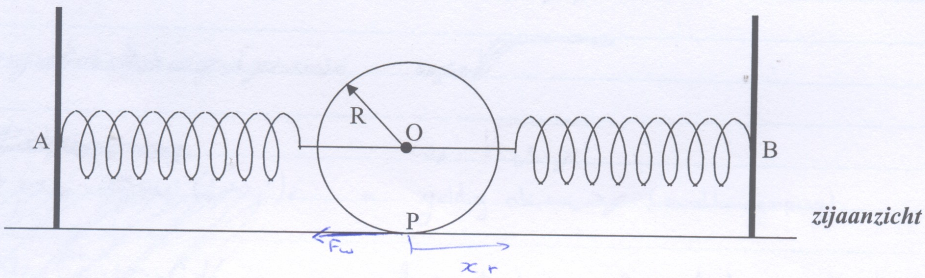
8pnt-

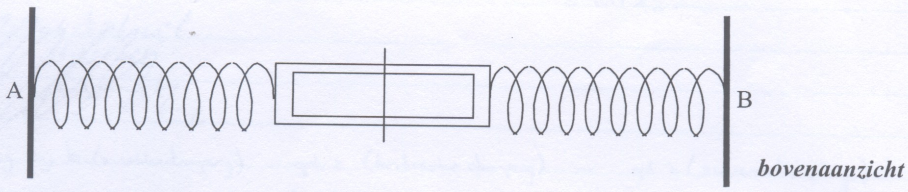
Opgave 4 (15 punten)

Een homogene schijf met massa M en straal R heeft traagheidsmoment $I_z = aMR^2$ ten opzichte van de rotatie-as door O (loodrecht op het vlak van de schijf).

a) Bepaal de constante a door middel van een berekening.

De as van de schijf is via een massaloze (dubbele) vork bevestigd aan twee veren elk met veersconstante k. De veren zijn vast verbonden met de punten A en B (zie figuur).





b) Het punt x = 0 is het evenwichtspunt waarbij de totale veerkracht op het wiel gelijk is aan nul. Hoe groot is de veerkracht die op de as van het wiel wordt uitgeoefend bij een uitwijking x uit de evenwichtsstand ?

c) Stel dat het wiel niet kan draaien en bij P wrijvingsloos slipt over de ondergrond. Geef de hoekfrequentie ω_0 waarmee het wiel heen en weer trilt nadat men het een uitwijking uit de evenwichtsstand heeft gegeven (in termen van k en M).

Stel dat het wiel wrijvingloos om de as kan draaien en bij P een wrijvingskracht F_w ondervindt.

d) Geef de bewegingsververgelijkingen voor de rotatie van het wiel en voor de beweging in horizontale richting.

e) Bepaal de hoekfrekwentie ω_1 waarmee het wiel slipvrij heen en weer rolt nadat men het een uitwijking in de x-richting heeft gegeven (in termen van a, M, R en k).

$\frac{2k}{aM(R-1)}$

F_w